DE PUNCTIS SINGULARIBUS CURVARUM ALGEBRAICARUM SIMPLICIS...

P. N. Ekman

DE

PUNCTIS SINGULARIBUS

CURVARUM ALGEBRAICARUM SIMPLICIS CURVATURÆ.

Omnes curvæ algebraicæ simplicis curvaturæ determinantur æquationibus algebraicis, quæ relationem quandam inter binas quantitates variabiles exhibent.

Sit igitur

$$u = f(x, y) = 0 \tag{1}$$

æquatio, radicalibus fractionibusque liberata, quæ quamcumque harum curvarum, ad coordinatas rectangulas relatam, determinat, et consideretur y ut functio ipsius x. Quo posito, si quantitas primitive variabilis x capiat incrementum h, functio ejus y accipiet incrementum respondens k, quod in genere per hanc seriem *Taylorianam* exprimi potest :

$$k = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3} + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{2.3.4} + \text{etc.}, \tag{2}$$

ubi coefficientes differentiales $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., quoniam nulla irrationalitas per differentiationem introducitur, sunt functiones rationales ipsarum x et y atque definiuntur suo quisque ordine ex his æquationibus differentialibus :

$$\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{du}{dx}=0, \tag{3}$$

$$\frac{du}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{d^2u}{dy\,dx}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2u}{dx^2}=0, \tag{4}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{du}{dy}\frac{d^3y}{dx^3}+3\left(\frac{d^2u}{dy^2}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}\\&\quad+\frac{d^3u}{dy^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+3\frac{d^3u}{dy^2dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+3\frac{d^3u}{dy\,dx^2}\frac{dy}{dx}+\frac{d^3u}{dx^3}=0,\end{aligned}\right. \tag{5}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{du}{dy}\frac{d^4y}{dx^4}+4\left(\frac{d^2u}{dy^2}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\\&\quad+6\left[\frac{d^3u}{dy^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{d^3u}{dy^2dx}\frac{dy}{dx}+\frac{d^3u}{dy\,dx^2}\right]\frac{d^2y}{dx^2}\\&\quad+\frac{d^4u}{dy^4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+4\frac{d^4u}{dy^3dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+6\frac{d^4u}{dy^2dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\\&\quad+4\frac{d^4u}{dy\,dx^3}\frac{dy}{dx}+\frac{d^4u}{dx^4}=0,\end{aligned}\right. \tag{6}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{du}{dy}\frac{d^5y}{dx^5}+5\left(\frac{d^2u}{dy^2}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)\frac{d^4y}{dx^4}\\&\quad+10\left[\frac{d^2u}{dy^2}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^3u}{dy^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{d^3u}{dy^2dx}\frac{dy}{dx}+\frac{d^3u}{dy\,dx^2}\right]\frac{d^3y}{dx^3}\\&\quad+15\left(\frac{d^3u}{dy^3}\frac{dy}{dx}+\frac{d^3u}{dy^2dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\\&\quad+10\left[\frac{d^4u}{dy^4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+3\frac{d^4u}{dy^3dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+3\frac{d^4u}{dy^2dx^2}\frac{dy}{dx}+\frac{d^4u}{dy\,dx^3}\right]\frac{d^2y}{dx^2}\\&\quad+\frac{d^5u}{dy^5}\left(\frac{dy}{dx}\right)^5+5\frac{d^5u}{dy^4dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+10\frac{d^5u}{dy^3dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\\&\quad+10\frac{d^5u}{dy^2dx^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+5\frac{d^5u}{dy\,dx^4}\frac{dy}{dx}+\frac{d^5u}{dx^5}=0,\\&\qquad\text{etc.}\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Jam si in coefficientibus seriei (2) pro x et y valores particulares, quæ coordinatas cujusdam puncti curvæ constituunt, substituantur, fieri potest, ut aut omnes coefficientes finiti et deter-

minati reddantur, aut non omnes finiti et determinati evadant. Si omnes finiti et determinati reddantur, hoc punctum nihil habet, in quo a ceteris curvæ punctis differat. Sin autem inter hos coefficientes sint, qui non finiti et determinati fiant, punctum est *singulare,* h. e. habet quidquam sibi proprium et peculiare, quo a ceteris punctis discernitur.

Qui coefficiens non finitus et determinatus redditur, is vel nihilo æqualis, vel infinite magnus, vel indeterminatus, h. e. $= \frac{0}{0}$, fiat necesse est. Neque vero imaginarius fieri, nec plures valores obtinere potest, cum æquatio, quæ expressionem ejus generalem suppeditat, rationalis sit et non nisi primam ejus potestatem contineat. Sed quoties hæc expressio abit in $\frac{0}{0}$, id indicio est, coefficientem plures valores habere debere, inter quos etiam imaginarii reperiri possunt.

Inspicienti æquationes (3)...(7) et sequentes apparet, omnium coefficientium, qui ex sua quisque harum æquationum determinantur, expressiones formam induere quantitatum fractarum, quarum numeratores dissimiles inter se et quidem magis magisque pro ordine coefficientis compositi sint, denominatores vero ex una eademque quantitate $\frac{du}{dy}$ conficiantur. Hinc sequitur, ut quilibet coefficiens differentialis, evanescente numeratore, nihilo æqualis fieri possit, ceteris tum antecedentibus tum subsequentibus finitis manentibus, sed nullus coefficiens differentialis infinite magnus nec indeterminatus fiat, quippe cum hoc pro valoribus finitis ipsarum x et y non nisi evanescente denominatore accidere possit, quin tum antecedentes tum subsequentes coefficientes vel infinite magni, vel indeterminati simul fiant, prout eorum numeratores vel finiti, vel nihilo æquales per eandem substitutionem reddantur. Itaque quoties alteruter horum casuum evenit, concludimus, universam seriem (2) transformandam esse.

At priusquam ulterius progrediamur et ad ipsam disquisitionem punctorum singularium accedamus, videndum est, quænam sit ratio et natura eorum valorum ipsarum x et y, qui seriem (2) abnormem reddant, et quomodo forma seriei, per quam incrementum k ipsius y exprimatur, determinetur, quam quidem for-

mam in examinandis punctis singularibus curvarum cognoscere necesse est, ad diversas enim serierum formas diversæ singularitates respondent.

(8) Si in æquatione algebraica rationali duarum variabilium x et y alteri variabili x certus quidam valor a tribuatur, altera variabilis y obtinebit, æquatione soluta, tot omnino valores, nullo discrimine inter reales et imaginarios facto, b, b', b'', b''', etc., quot summus exponens ipsius y continet unitates, et si pro x alius valor $a + h$ substituatur, y totidem alios obtinebit valores, quos per $b + k$, $b' + k'$, $b'' + k''$, $b''' + k'''$, etc., denotare possumus. Jam si valor uniuscujusque horum incrementorum k, k', k'', etc., quæ incremento h respondent, in seriem, secundum adscendentes ipsius h potestates progredientem, convertatur, manifestum est, ullum terminum nec factore h carere, nec hunc factorem cum exponente negativo continere posse, si quidem, facto $h = 0$, incrementa quoque k, k', etc., evanescere oporteat. Porro, si omnes valores b, b', etc., inæquales sint, nec ullus coefficiens seriei plures valores obtinere, nec ullus exponens ipsius h fractus esse potest, quoniam series ita comparata esse debet, ut incrementum, quod per eam determinatur, unicum tantum valorem sortiatur. Nam cum tot sint valores b, b', etc., ad quos singulos singula incrementa k, k', etc., pertinent, quot summa potestas ipsius y est dimensionum, si aliquod horum incrementorum plures valores obtineret, fieret, ut valores ipsius y, valori $x = a + h$ respondentes, plures essent, quam unitates in exponente summo ipsius y insunt, id quod absurdum est. Itaque incidimus in hoc casu in ipsam seriem *Taylorianam*

$$k = Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + \text{etc.},$$

ubi tamen quidam termini post primum, coefficientibus evanescentibus, deesse possunt.

Simili ratione, si pro certo valore $y = b$, in æquatione substituto, altera variabilis x tot valores inæquales a, a', a'', a''', etc., obtineat, quot summus exponens ipsius x continet unitates, et postea alius valor $b + k$ loco y ponatur, cui hi valores ipsius x,

$a+h$, $a'+h'$, $a''+h''$, etc., respondeant, nullum horum incrementorum h, h', etc., recipiet plures valores, sed omnia per series hujus formæ determinentur :

$$h = A'k + B'k^2 + C'k^3 + D'k^4 + \text{etc.}$$

Sin, posito $x=a$, plures valores ipsius y inter se æquales fiant, ut sit ex. gr. b radix multiplex æquationis, ceteri vero valores b', b'', etc., singulares, numerus valorum inæqualium minor est quam pro gradu æquationis. Quoniam autem hæc res pendet ex relatione quadam singulari coefficientium æquationis inter se, ex valore illo particulari $x=a$ nata, et rursus evanescente, quando pro x substituatur alius valor $a+h$, valores ipsius y inæquales, $b+k$, $b'+k'$, $b''+k''$, etc., qui huic substitutioni $x=a+h$ respondent, nihilominus erunt pares numero unitatibus, in summo exponente ipsius y contentis, atque adeo plures, quam valores b, b', b'', etc., qui illi substitutioni $x=a$ respondent. Numerus vero excedentium valorum idem erit, ac numerus radicum æqualium, una demta. Qui quidem numerus ut compleatur, incrementum k, multiplici valori b addendum, tot valores diversos obtinere oportet, quot sunt radices valori b æquales. Habebit igitur series, per quam valor ipsius k exprimitur, eam formam, quæ talem diversitatem valorum admittat. Hoc autem tribus modis effici potest; si aut coefficientes seriei plures valores obtineant, exponentibus incrementi h integris manentibus, aut exponentes fracti reddantur, coefficientibus singulos tantum valores obtinentibus, aut tum coefficientes multiplices, tum exponentes fracti simul reddantur. (9)

(*a*). Si, exponentibus integris manentibus, coefficientes plures obtineant valores, numerus horum valorum idem erit, ac numerus radicum æquationis valori b æqualium. In hoc casu series novam quidem non induit formam, sed solum in plures diversas abit, quarum quæque ad formam seriei *Taylorianæ* componitur, ita ut sit : (10)

$$k = \begin{cases} Ah + Bh^2 + Ch^3 + \text{etc.} \\ A'h + B'h^2 + C'h^3 + \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Fieri etiam potest, ut, primis coefficientibus singulos valores obtinentibus, series ad posteriorem demum terminum in diversas partes discedat, ut sit ex. gr.

$$k = Ah + Bh^2 + \begin{cases} Ch^3 + Dh^4 + \text{etc.} \\ C'h^3 + D'h^4 + \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

De cetero observandum est, diversos valores incrementi k hoc modo per diversos valores coefficientium exprimi non posse, nisi sint, posito $y = b$ ad minimum totidem valores ipsius x æquales a, quot sunt, posito $x = a$, valores ipsius y æquales b. Nam si ex seriebus, supra exhibitis, valor ipsius h per methodum inversam serierum quæratur, is erit, singulis seriebus datis singulas series inversas gignentibus, ad minimum æque multiplex atque valor ipsius k, quod quidem fieri nequit, nisi sit a valor æque multiplex ipsius x, ac b est ipsius y. Potest vero h vel plures valores obtinere, si primus terminus in quibusdam seriebus, valorem ipsius k exprimentibus, desit.

(11) (b). Si, coefficientibus singulos tantum valores obtinentibus, series secundum fractas potestates incrementi h progrediatur, omnes fracti exponentes habebunt eundem denominatorem, qui quidem communis denominator idem erit ac numerus valorum ipsius y æqualium. Numerator vero primi termini seriei idem erit ac numerus valorum ipsius x æqualium. Nam, cum quisque terminus tot valores habeat, quot insunt unitates in denominatore exponentis, si denominatores æquales quidem, sed majores essent, quam numerus valorum ipsius y æqualium, valores incrementi k justo plures fierent; et si denominatores æquales et minores essent, quam numerus valorum æqualium, valores incrementi k justo pauciores fierent; denique si denominatores inæquales essent, numerus valorum incrementi k, compositis diversis valoribus terminorum, justo aut major aut minor fieret, nisi denominatores essent factores ejus numeri, qui indicat, quot sint valores ipsius y æquales, quo casu etiam fractiones concinnatæ ad hunc numerum ut communem denominatorem reduci possunt.

Et quoniam idem convenit in eam seriem, secundum adscendentes ipsius k potestates progredientem, per quam valor incrementi h exprimitur, sequitur, ut communis denominator exponentium fractorum ipsius k in hac serie idem sit, ac numerus valorum ipsius x æqualium. Hæc vero eadem series, si ex illa, quæ valores ipsius k exhibet, per methodum inversam serierum deducatur, accipiet communem denominatorem, numeratori primi termini illius seriei æqualem. Hic ergo numerator idem sit necesse est, ac numerus valorum ipsius x æqualium.

Itaque si m sit numerus valorum æqualium ipsius y, et n numerus valorum æqualium ipsius x, erit

$$k = \mathrm{M}h^{\frac{n}{m}} + \mathrm{N}h^{\frac{p}{m}} + \mathrm{P}h^{\frac{q}{m}} + \text{etc.}$$

Fieri etiam potest, ut series initio secundum integras potestates incrementi h progrediatur, et exponentes fracti ab posteriori demum termino incipiant, ut sit ex. gr.

$$k = \mathrm{A}h + \mathrm{B}h^2 + \ldots\ldots + \mathrm{M}h^{\frac{p}{m}} + \text{etc.};$$

id quod evenit, quoties pro primis coefficientibus seriei, secundum integras potestates progredientis, valores finiti reperiantur. Nam is demum terminus exponentem fractum obtinebit, cujus coefficiens in serie regulari infinite magnus evadit. Qui vero futurus sit primus exponens fractus, etiam in hoc casu facile perspicitur, cum denominator per regulam supra datam usque determinetur, et numerator talis esse debeat, ut numerus fractus a proxime antecedentis termini exponente integro minus unitate differat, atque adeo inter hunc exponentem et proxime subsequentem numerum integrum interjaceat. Quod si adhuc aliquid ambigui restet, id tollitur, ut videbimus, inspiciendo numeratore expressionis pro eo coefficiente, qui ob denominatorem nihilo æqualem infinite magnus factus est.

Ceterum de coefficientibus notandum est, eos, etiam si signis radicalibus affecti sint, tamen pro simplicibus habendos esse, quoties, numerus valorum, quos terminus obtinet, per talem affec-

tionem coefficientis non augetur. Sic coefficiens in $\sqrt{A}h^{\frac{1}{2}}$ non minus quam in $Ah^{\frac{1}{2}}$ simplex putandus est, quoniam ille terminus non plures habeat valores quam hic.

(12) (*c*). Si tum coefficientes multiplices, tum exponentes fracti sint, universi valores, ex diversis seriebus oriundi, simul conficient numerum valorum, quos k obtinere oportet, et series præterea ita comparatæ erunt, ut, si invertantur, etiam h obtineat eum numerum valorum, qui ei conveniat. Sic, si k tres, h vero duo valores habebit, forma serierum hæc esse potest :

$$k = \begin{cases} Ah + Bh^2 + Ch^3 + \text{etc.} \\ Mh^{\frac{1}{2}} + Nh^{\frac{2}{2}} + Ph^{\frac{3}{2}} + \text{etc.}; \end{cases}$$

recipiet vero utrumque incrementum ternos valores hoc modo :

$$k = \begin{cases} Bh^2 + Ch^3 + \text{etc.} \\ Mh^{\frac{1}{2}} + Nh^{\frac{2}{2}} + \text{etc.}, \end{cases}$$

et sic porro.

Ex allatis igitur colligitur, non modo nullam aberrationem a solita forma, si ab eo casu recesseris, ubi quidam ex coefficientibus terminorum, qui primum subsequuntur, nihilo æquales reddantur, in serie occurere posse, nisi positis pro x et y talibus valoribus, qui vice radicum æqualium in æquatione funguntur, sed etiam formam seriei abnormis ex numero radicum æqualium pendere. Itaque cognitio multiplicitatis valorum in singularitate punctorum examinanda plurimum valet.

(13) Hæc vero multiplicitas, quæ sit, facile perspicitur. Nam, posito certo quodam valore a pro x in $f(x, y)$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^3u}{dy^3}$, etc., ipsa quidem functio nihil aliud erit, nisi æquatio primitiva, unam incognitam y continens, et $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^3u}{dy^3}$, etc., erunt ejus derivatæ; itidemque, posito in $f(x, y)$, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, etc., pro y

certo quodam valore b, ipsa functio crit æquatio primitiva, unam incognitam x continens, et $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, etc., erunt ejus derivatæ. Hinc, quoniam, ut in theoria æquationum demonstratur, radix duplex æquationis non modo ipsam æquationem, sed etiam primam derivatam nihilo æqualem reddit, radix triplex insuper derivatam secundam, et sic porro, colligere licet, quoties valores a et b, pro x et y substituti, non modo ipsam functionem $f(x, y)$, sed etiam unum, vel duos, vel tres, etc., deinceps ex coefficientibus differentialibus partialibus $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, etc., qui oriuntur, si y tamquam variabilis, x vero tamquam constans tractetur, nihilo æquales faciant, b esse duplicem, vel triplicem, vel quadruplicem, etc., valorem ipsius y; et quoties per candem substitutionem, non modo functio ipsa, sed etiam unus, vel duo, vel tres, etc., deinceps ex coefficientibus differentialibus partialibus $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc., qui oriuntur, si sola x tamquam variabilis tractetur, nihilo æquales reddantur, a esse duplicem, vel triplicem, vel quadruplicem, etc., valorem ipsius x. Ex æquationibus vero (3)...(7) et sequentibus apparet, quot differentialium partialium $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc., qui se deinceps excipiunt, nihilo æquales sunt, totidem coefficientes continuos $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., in serie (2) evanescere, ita ut etiam dici possit, a esse duplicem, vel triplicem, etc., valorem ipsius x, prout unus, vel duo, etc., coefficientium initialium in serie (2) nihilo æquales sint.

Et cum quivis coefficiens differentialis respectu eorum, qui eum subsequuntur, tamquam functio primitiva considerari possit, etiam concludimus, si plures coefficientes continui cujusvis ordinis in serie (2), posito $x = a$ et $y = b$, nihilo æquales reddantur, quemlibet horum, post substitutionem $y = b$ tamquam æquationem solius x consideratum, tot habere radices æquales ipsi a, quot coefficientes, proxime eum sequentes, evanescunt, et insuper unam. (14)

Restat, ut ex doctrina de linearum contactu nonnulla proposita repetamus, quæ nobis in sequente disquisitione usui erunt. Hæc igitur pro demonstratis habemus:

(15) Ordo contactus definitur numero coefficientium differentialium communium ab initio seierum, quæ cursum linearum in regionibus, puncto contactus finitimis, designant;

(16) Si contactus sit imparis ordinis, altera linea ab eadem parte alterius ante et post contactum sita est; ad oppositas vero partes, si sit contactus paris ordinis, ita ut cum hoc contactu intersectio conjuncta sit;

(17) Nulla linea cum altera contactum superioris ordinis habere potest, quam qui definitur numero quantitatum constantium, ad arbitrium determinandarum, quas continet ejus æquatio, una demta, nisi forte per peculiarem qualitatem quantitatum proxime subsequens coefficiens unius seriei proxime subsequenti alterius æqualis fiat.

(18) Quæ jam applicemus ad eam classem linearum, quæ *parabolicæ* vocantur et hac æquatione generali designantur:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.}$$

Hæc æquatio pertinet ad lineam rectam, si omnes termini posterioris membri post secundum nulli sint; ad parabolam proprie sic dictam sive *Apollonianam,* si omnes post tertium; ad parabolam cubicam, si omnes post quartum; et sic porro.

Itaque in genere linea recta habere non potest cum curva contactum superioris ordinis quam primi; parabola Apolloniana non superioris quam secundi ordinis; parabola cubica non superioris quam tertii ordinis; et sic porro, ordine lineæ ordinem contactus determinante. Sed quoniam æquatio pro linea recta omnes coefficientes differentiales post primum nihilo æquales habet; pro parabola Apolloniana omnes post secundum; pro parabola cubica omnes post tertium; et sic porro, sequitur, ut, quoties in serie, qua cursus curvæ in regionibus, puncto contactus finitimis, denotatur, vel secundus, vel tertius, vel quartus coefficiens differentialis nihilo æqualis sit, contactus, quem vel recta, vel parabola Apollonii, vel parabola cubica habeat cum hac curva, arctior

fiat quam pro ordine lineæ tangentis; et quidem eo superioris ordinis, quo plures coefficientes continui evanescant.

His ergo præmissis ad ipsam disquisitionem punctorum singularium progrediamur. Omne punctum curvæ aut tale est, per quod solus ramus transeat, aut tale, in quo plures rami conveniant. Numerus vero horum ramorum, in uno puncto convenientium, determinatur numero valorum, quos primus coefficiens differentialis seriei (2) $\frac{dy}{dx}$ obtinet, hujus puncti coordinatis substitutis pro x et y in æquationibus (3)...(7) et sequentibus. Nam cum sit $\frac{dy}{dx}$ tangens trigonometrica anguli, quem tangens curvæ facit cum axe abscissarum, sequitur, ut, quot habeat $\frac{dy}{dx}$ valores, tot sint tangentes curvæ in dato puncto; et cum unicus arcus in eodem puncto plures tangentes habere nequeat, totidem etiam diversi rami curvæ in hoc puncto conveniant necesse est. Fieri tamen potest, ut non omnes rami re vera exstent, quod semper usu venit, si quidam valores imaginarii sint, et interdum, si quidam sint æquales. Quoniam vero hoc punctum, etiam si unicus tantum ramus exstet, nihilominus a puncto simplici differat, dividimus puncta curvarum in *simplicia, duplicia, triplicia,* etc., non pro numero ramorum, re vera exstantium, sed pro numero valorum, quos $\frac{dy}{dx}$ obtinet, ita ut punctum sit simplex, si $\frac{dy}{dx}$ unicum tantum valorem obtineat; duplex, si duos; triplex, si tres; etc., sive hi valores inæquales sint, sive æquales; sive reales, sive imaginarii. Et cum $\frac{dy}{dx}$, nisi fiat in æquatione (3) indeterminatus, plures valores obtinere nequeat, sequitur ex nostra definitione, ut omnia puncta multiplicia sint singularia. Singuli vero rami præterea aliis singularitatibus in eodem puncto affecti esse possunt. Ad plenam igitur et perfectam cognitionem cujusdam puncti curvæ requiritur, determinasse, non minus quotuplex sit ipsum punctum, quam quænam sit singularitas uniuscujusque ramorum, qui ibi conve-

niunt. Illud definitur, ut nuper dictum est, numero valorum ipsius $\frac{dy}{dx}$, hoc pendet a forma seriei, per quam valor incrementi k exprimitur, et cognoscitur, si cursus rami, qui hac serie designatur, in regionibus, quæ puncto finitimæ sunt, investigetur. Quamobrem hæc disquisitio ita erit instituta, ut primum valores ipsius $\frac{dy}{dx}$ determinentur, deinde forma seriei exhibeatur, denique singularitas, quæ huic formæ respondeat, ostendatur. Incrementum vero h semper tam parvum concipimus, ut quivis terminus seriei, per quam valor incrementi k exprimitur, summam omnium sequentium superet.

(19) Si, puncti cujusdam coordinatis a et b pro x et y substitutis, termini æquationis (3) pro se quisque nihilo æquales non reddantur, primus coefficiens differentialis $\frac{dy}{dx}$ unicum tantum valorem obtinet, et punctum est simplex.

Coefficiens $\frac{dy}{dx}$ unicum tantum valorem in hoc casu obtinet, quoniam determinatur ex æquatione (3), quæ non nisi primam ejus potestatem continet. Hic vero valor vel finitus, vel nihilo æqualis, vel infinite magnus esse potest.

(20) (1°.) *Si valor unicus primi coefficientis differentialis $\frac{dy}{dx}$ finitus sit, tangens curvæ inclinata est in axem abscissarum.*

Quoniam tum nec denominator $\frac{du}{dy}$, nec numerator $\frac{du}{dx}$ nihilo æqualis est, b et a sunt valores simplices ipsarum y et x in æquatione $f(x, y) = 0$ (13), quamobrem k et h singulos valores obtinere debent (8). Et si, substituto pro $\frac{dy}{dx}$ valore invento, sequentes coefficientes differentiales ex sua quisque æquatione quærantur, invenimus re vera, eos nec plures valores obtinere, primo coefficiente unum tantum sortiente, nec infinite magnos fieri, communi

eorum denominatore $\frac{du}{dy}$ valorem finitum habente; atque adeo seriem nec in plures dilabi, nec secundum fractas potestates ipsius h progredi posse. Itaque erit :

$$k = Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + Eh^5 + \text{etc.},$$

litteris A, B, C, etc., denotantibus valores coefficientium $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., suo quemque ordine per 1, 1.2, 1.2.3, etc., divisos; et punctum nihil habet singulare, nisi sit aliquis ex terminis, qui primum insequuntur, nihilo æqualis. Qualis vero singularitas inde oriatur, jam videbimus.

(*a*). Si $B = 0$, tangens habet in hoc puncto contactum secundi ordinis cum curva (**18**), quæ adeo ibi propius quam in aliis suis partibus ad cursum rectæ lineæ accedit, id quod vel ex eo apparet, quod radius curvaturæ, cujus in expressione $\frac{d^2y}{dx^2}$ est denominator, posito $B = 0$, infinite magnus evadit. Et quoniam $\frac{d^2y}{dx^2}$, qui, ob relationem inter x et y in functione primitiva $f(x, y) = 0$ datam, tamquam functio solius x considerari potest, habet radicem ipsi a æqualem, obtinebit valores, oppositis signis affectos, pro $x = a + h$ et $x = a - h$, intra quos limites una radix continetur. Signum autem coefficientis $\frac{d^2y}{dx^2}$ determinat signum radii curvaturæ, et hujus diversa signa indicant diversas regiones, in quas curvatura vergit. Inflectitur itaque curva in puncto, ita ut convexitatem ab altera parte regioni ordinatarum negativarum, ab altera regioni positivarum advertat. De cetero, quoniam contactus est paris ordinis, tangentem ab altera parte supra curvam, ab altera infra sitam esse oportet (**16**). Hoc punctum vocatur *punctum inflexionis*.

(*b*). Si $C = 0$, parabola Apolloniana, osculans curvam in puncto, habet cum ea contactum tertii ordinis (**18**). Itaque curva ibi propius quam in aliis suis partibus accedit ad cursum hujus

parabolæ. Sed quoniam contactus est imparis ordinis, linea osculans in eadem parte alterius ante et post contactum sita est.

(c). Si $D = o$, parabola cubica, osculans curvam in puncto, habet cum ea contactum quarti ordinis et intersecat eam simul, quoniam ordo contactus par est; et ita porro.

(d). Si et $B = o$ et $C = o$, recta tangens habet cum curva contactum tertii ordinis (**18**) et in eadem ejus parte ante et post contactum sita est. Nec ulla apparet inflexio, sed curvatura in utraque parte eodem vergit, cum $\frac{d^2y}{dx^2}$, cujus a est radix duplex (**14**), valores, eodem signo affectos, sortiatur, sive $a + h$, sive $a - h$ pro x substituatur. Hoc punctum vocatur *punctum duplicis inflexionis*.

(e). Si et $B = o$ et $C = o$ et $D = o$, contactus tangentis cum curva est quarti ordinis, adeoque cum intersectione conjuncta. Et quoniam $\frac{d^2y}{dx^2}$ habet tres radices æquales valori a (**14**), obtinebit opposita signa pro $x = a + h$ et $x = a - h$, inter quos limites impar numerus radicum continetur. Curva ergo subit inflexionem in hoc puncto, quod vocatur *punctum triplicis inflexionis*.

(f). Si et $B = o$ et $C = o$ et $D = o$ et $E = o$, tangens habet cum curva contactum quinti ordinis. Hoc punctum, ubi nec intersectio, nec inflexio exstat, vocatur *punctum quadruplicis inflexionis*. Simili modo, quicunque et quotcunque coefficientium differentialium nulli sint, puncti proprietas, quæ singulis casibus respondeat, facile invenitur. Observandum tamen est, ea puncta, in quibus parabola quædam arctiorem contactum cum curva habeat, ob eam solam rem inter singularia vulgo non numerari.

Itaque, his omissis, quoties $\frac{dy}{dx}$ *unicum valorem eumque finitum obtinet, punctum aut nullam singularitatem habet, si* $\frac{d^2y}{dx^2}$ *finitus sit, aut est punctum inflexionis, si sit* $\frac{d^2y}{dx^2} = o$. *Ordo vero inflexionis determinatur numero coefficientium continuorum, qui nihilo æquales sunt.*

(2°). *Si valor unicus primi coefficientis differentialis* $\frac{dy}{dx}$ *nihilo* **(21)**
æqualis sit, tangens curvæ est parallela axi abscissarum.

Quoniam tum numerator $\frac{du}{dx}$, non vero denominator $\frac{du}{dy}$, nihilo æqualis est, a est valor duplex ipsius x, b vero valor simplex ipsius y in æquatione $f(x, y) = 0$ (**13**), et series ita erit comparata, ut k unum, h vero duo valores accipiat (**9**). Cui quoque conditioni satisfacit hæc series, secundum integras potestates ipsius h procedens et primo termino carens, quam eodem modo, quo in casu præcedente (**20**), pro expressione ipsius k invenimus :

$$k = Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + Eh^5 + \text{etc.}$$

Quoniam in hac serie valor ipsius k sortitur idem signum, sive h positive, sive negative capiatur, punctum aut longius aut propius, quam ea puncta curvæ, quæ ei ab utraque parte proxima sunt, ab axe abscissarum abest, quo sequitur, ut ejus ordinata aut maximum, aut minimum sit, prout coefficiens B aut negativus aut positivus est. Et cum $x = a$ sit radix simplex functionis $\frac{dy}{dx}$, hæc functio pro $x = a + h$ et $x = a - h$ valores, oppositis signis affectos, accipiat necesse est. Itaque duæ rectæ, quæ tangunt curvam, altera in puncto, cujus abscissa est $a + h$, altera in puncto, cujus abscissa est $a - h$, faciunt cum axe abscissarum angulos diversa natura; altera acutum, altera obtusum.

Si insuper unus vel plures sequentium coefficientium nihilo æquales sint, punctum eam habet proprietatem, quam supra (**20**) singulis casibus respondere invenimus. Sic

(a). Si $B = 0$, a est valor triplex ipsius x in æquatione $f(x, y) = 0$ (**13**), et series fit

$$k = Ch^3 + Dh^4 + Eh^5 + \text{etc.}$$

Punctum est simplicis inflexionis, et ejus ordinata nec maximum est nec minimum, quoniam k obtinet contraria signa pro $+h$ et $-h$. Et quoniam cum $A = 0$, tum $B = 0$, a est radix duplex functionis

$\frac{dy}{dx}$ (14), quæ quidem eam ob causam idem signum sortitur, sive in ea ponatur $x = a + h$, sive $x = a - h$, unde sequitur, ut tangentes curvæ ab utraque parte puncti angulos ejusdem generis cum axe abscissarum faciant; aut acutos, si valor ipsius $\frac{dy}{dx}$ per hanc substitutionem positivus reddatur, aut obtusos, si negativus.

(*b*). Si et $B = 0$ et $C = 0$, a est valor quadruplex ipsius x, et series fit

$$k = Dh^4 + Eh^5 + \text{etc.}$$

Punctum est duplicis inflexionis, et ejus ordinata aut maximum aut minimum. Anguli vero tangentium ad diversas partes puncti sunt diversa natura.

(*c*). Si et $B = 0$ et $C = 0$ et $D = 0$, a est valor quintuplex ipsius x, et series fit

$$k = Eh^5 + \text{etc.}$$

Punctum est triplicis inflexionis, et ordinata nec maximum nec minimum. Anguli vero tangentium sunt eadem natura ab utraque parte puncti; et sic porro.

Itaque, quoties $\frac{dy}{dx}$ *unicum valorem eumque nihilo æqualem obtinet, aut solummodo puncti ordinata est maximum vel minimum, si solus coefficiens* $\frac{dy}{dx}$ *nihilo æqualis sit, aut est punctum inflexionis, si plures coefficientes continui evanescant, in quo casu ordinata simul maximi minimive proprietate gaudet, quoties inflexio est pari multiplicitate, h. e. quoties par numerus coefficientium, qui primum subsequuntur, nihilo æqualis est.*

(22) (3°.) *Si valor unicus primi coefficientis differentialis* $\frac{dy}{dx}$ *infinite magnus sit, tangens curvæ est normalis ad axem abscissarum.*

Quoniam tum denominator $\frac{du}{dy}$, non vero numerator $\frac{du}{dx}$, nihilo æqualis est, b est valor duplex ipsius y, a vero valor simplex

ipsius x in æquatione $f(x, y) = o$ (13), et series ita erit comparata, ut k duos valores, h vero unum obtineat (9). Quare, cum præterea, ob primum coefficientem differentialem infinite magnum, series inde a primo termino secundum fractas potestates incrementi h progrediatur necesse sit, communis denominator erit 2, primus vero exponens $\frac{1}{2}$ (11), et fiet

$$k = Mh^{\frac{1}{2}} + Nh^{\frac{m}{2}} + Ph^{\frac{n}{2}} + \text{etc.}$$

Quam seriem solus valor positivus ipsius h realem reddit, si omnes coefficientes reales sint, et solus valor negativus, si omnes coefficientes potestatum fractarum ipsius h imaginarii sint, sed in utrovis casu series duos valores induit. Seriem vero semper ita esse comparatam, ut aut pro hoc aut pro illo valore realis fiat, vel inde colligimus, quod, si vicissim spectemus x ut functionem ipsius y et evolvamus valorem incrementi h per seriem secundum adscendentes potestates ipsius k, incidimus in eundem casum, quem supra (21) tractavimus, ubi nullo modo series imaginaria fieri potest. Itaque arcus curvæ semper exstat, et punctum aut longius aut propius ab axe ordinatarum abest, quam ea puncta curvæ, quæ ei ab utraque parte proxima sunt, ita ut ejus abscissa aut maximum aut minimum sit, prout coefficientes aut imaginarii aut reales sunt.

Jam, quæ sit proprietas puncti, si adhuc unus vel plures coefficientium differentialium partialium ipsius y, qui primum proxime sequuntur, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^3u}{dy^3}$, etc., nihilo æquales sint, facile est invenire, exhibendis examinandisque seriebus, atque comparandis singulis casibus cum casibus analogis, supra (21 : a, b, c) tractatis. Sic

(a). Si $\frac{d^2u}{dy^2} = o$, b est valor triplex ipsius y in æquatione $f(x, y) = o$ (13), et series fit (11)

$$k = Mh^{\frac{1}{3}} + Nh^{\frac{m}{3}} + Ph^{\frac{n}{3}} + \text{etc.},$$

ubi k unicum valorem realem accipit, si h affirmative capiatur,

unicum etiam, opposito signo affectum, si negative. Quare punctum est simplicis inflexionis, et ejus abscissa nec maximum nec minimum. Tangens vero habet ibi cum curva contactum secundi ordinis.

(b). Si et $\frac{d^2u}{dy^2}=0$ et $\frac{d^3u}{dy^3}=0$, b est valor quadruplex ipsius y, et series fit

$$k = Mh^{\frac{1}{4}} + Nh^{\frac{m}{4}} + Ph^{\frac{n}{4}} + \text{etc.},$$

ubi k duos valores reales obtinet, h affirmative sumto, si coefficientes reales sint, at h negative sumto, si coefficientes imaginarii sint. Est punctum duplicis inflexionis, et ejus abscissa est vel maximum vel minimum, prout coefficientes vel imaginarii vel reales sunt. Tangens vero habet cum curva contactum tertii ordinis.

(c). Si et $\frac{d^2u}{dy^2}=0$ et $\frac{d^3u}{dy^3}=0$ et $\frac{d^4u}{dy^4}=0$, b est valor quintuplex ipsius y, et series fit

$$k = Mh^{\frac{1}{5}} + Nh^{\frac{m}{5}} + Ph^{\frac{n}{5}} + \text{etc.},$$

quæ unicum valorem realem obtinet, sive h positive, sive negative sumatur, quo fit, ut abscissa nec maximum sit nec minimum. Punctum vero est triplicis inflexionis, et tangens habet contactum quarti ordinis cum curva; et sic porro.

Itaque, quoties $\frac{dy}{dx}$ unicum valorem eumque infinite magnum obtinet, aut solummodo puncti abscissa est maximum vel minimum, si solus coefficiens partialis $\frac{du}{dy}$ nihilo æqualis sit, h. e. si communis denominator exponentium fractorum sit 2, aut est punctum inflexionis, si plures coefficientes partiales continui evanescant, h. e. si communis denominator sit major quam 2, in quo casu abscissa simul maximi minimive proprietate gaudet, quoties inflexio est pari multiplicitate, h. e. quoties denominator est numerus par.

(23) Si, puncti cujusdam coordinatis a et b pro x et y substitutis,

TERMINI ÆQUATIONIS (3), NON VERO ÆQUATIONIS (4), PRO SE QUISQUE NIHILO ÆQUALES REDDANTUR, PRIMUS COEFFICIENS DIFFERENTIALIS $\frac{dy}{dx}$ DUOS OBTINET VALORES, ET PUNCTUM EST DUPLEX.

Quoniam in hoc casu $\frac{dy}{dx}$ in æquatione (3) evadit $= \frac{0}{0}$ atque adeo indeterminatus, ad proxime subsequentem æquationem (4) progrediendum est, ut inde valor determinatus eruatur. Et cum hæc æquatio, quæ ob $\frac{du}{dy} = 0$ abit in

$$\frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,\frac{d^2u}{dydx}\,\frac{dy}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} = 0, \tag{24}$$

sit secundi gradus, $\frac{dy}{dx}$ obtinebit ibi duo valores. Hi vero valores vel reales et inæquales, vel reales et æquales, vel imaginarii esse possunt.

(1°.) *Si ambo valores primi coefficientis differentialis* $\frac{dy}{dx}$ *reales et inæquales sint, ambo tangentes curvæ diverse in axem abscissarum inclinatæ sunt, et ambo rami, semper exstantes, decussant se invicem in puncto.* (25)

Cum hic tum $\frac{du}{dy} = 0$, tum $\frac{du}{dx} = 0$, b et a sunt valores duplices ipsarum y et x in æquatione $f(x, y) = 0$, quare k et h binos valores obtinere debent. Quod si ex sequentibus æquationibus (5)...(7), etc., primo termino, ob $\frac{du}{dy} = 0$, carentibus, valores sequentium coefficientium differentialium $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc., quærantur, reperimus ex æquatione (5) pro $\frac{d^2y}{dx^2}$ duos diversos valores, ex duobus valoribus ipsius $\frac{dy}{dx}$, altero post alterum substituto, provenientes; itidemque ex æquatione (6) pro $\frac{d^3y}{dx^3}$

duos diversos valores, prout uni vel alteri valorum, sibi invicem respondentium, pro $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ substituuntur; et sic deinceps. Nullus vero coefficiens nec plures quam duo valores obtinebit, cum omnes ex æquationibus primi gradus determinentur, nec infinite magnus fiet, $\frac{dy}{dx}$ valores finitos obtinente, cum omnium expressionum denominatores contineantur hac functione $\frac{d^2u}{dy^2}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2u}{dydx}$, per factorem numericum multiplicata, quæ quidem functio, utpote prima derivata æquationis (24), nihilo æqualis esse nequit, exsistentibus radicibus æquationis inæqualibus. Itaque invenimus valores ipsius k per has series expressos

$$k=\begin{cases} Ah+Bh^2+Ch^3+\text{etc.} \\ A'h+B'h^2+C'h^3+\text{etc.,}\end{cases}$$

quarum utraque suum peculiarem ramum designat; et quoniam in utralibet eædem aberrationes a formula generali, quæ in serie, ramum simplicem determinante, inesse possunt, utervis ramorum in puncto duplici quavis singularitate, quam talibus aberrationibus respondere supra (20, 21, 22) demonstravimus, affectus esse potest. Sic, si $A=o$, quod evenit, si terminus ultimus æquationis (24) $\frac{d^2u}{dx^2}$ nihilo æqualis sit, adeoque a valor triplex, tangens alterius rami est parallela axi abscissarum; si $B=o$, hic ramus habet inflexionem; et si $A=\infty$, quod evenit, si coefficiens primi termini æquationis (24) $\frac{d^2u}{dy^2}$ nihilo æqualis sit, adeoque b valor triplex, fit

$$k=\begin{cases} Mh^{\frac{1}{2}}+Nh^{\frac{m}{2}}+Ph^{\frac{n}{2}}+\text{etc.} \\ A'h+B'h^2+C'h^3+\text{etc.,}\end{cases}$$

et tangens alterius rami est normalis ad axem abscissarum. Si

$A = 0$ et $A' = \infty$, fit

$$k = \begin{cases} Bh^2 + Ch^3 + \text{etc.} \\ Mh^{\frac{1}{2}} + Nh^{\frac{m}{2}} + \text{etc.}, \end{cases}$$

et tangens unius rami est parallela axi abscissarum, alterius ad eum normalis.

Itaque, quoties $\frac{dy}{dx}$ *duos valores reales eosque inæquales obtinet, duo rami curvæ decussant se invicem in puncto, quorum uterlibet, serie a formula generali aberrante, quavis singularitate, quam supra* (**20, 21, 22**) *in simplici ramo inesse posse ostendimus, affectus esse potest.*

(2°). *Si ambo valores primi coefficientis differentialis* $\frac{dy}{dx}$ *reales et æquales sint, ambo tangentes curvæ habent eandem inclinationem in axem abscissarum, h. e. coeunt in unam, et ambo rami curvæ, si exstent, contingunt se invicem.* (26)

Cum radices æquationis (**24**) æquales sint, prima ejus derivata est necessario nihilo æqualis. Habemus ergo in hoc casu

$$\frac{d^2u}{dy^2}\,\frac{dy}{dx} + \frac{d^2u}{dy\,dx} = 0. \tag{27}$$

Radix vero duplex vel finita, vel nihilo æqualis, vel infinite magna esse potest.

(*a*). *Si valor duplex ipsius* $\frac{dy}{dx}$ *finitus sit, tangens communis ramorum inclinata est in axem abscissarum.* (28)

Et quoniam tum nec coefficiens primi termini $\frac{d^2u}{dy^2}$, nec ultimus terminus $\frac{d^2u}{dx^2}$ in æquatione (**24**) nihilo æqualis est, b et a non sunt nisi valores duplices ipsarum y et x, quare k et h binos tantum valores obtinere oportet. Jam vero, si valorem secundi coefficientis differentialis ex æquatione (**5**) quæramus, invenimus pro eo expressionem, cujus denominator ob conditionem (**27**) nullus est, numerator autem vel finitus, vel nullus esse potest.

Si numerator finitus sit, fit $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$, quo sequitur, ut series inde a secundo termino secundum fractas potestates incrementi h progrediatur, et quidem ita, ut communis denominator sit 2, exponens vero secundi termini inter 1 et 2 comprehendatur (**11**). Itaque erit

$$k = Ah + Mh^{\frac{3}{2}} + Nh^{\frac{m}{2}} + \text{etc.}$$

Hæc series duos valores reales induit, sumto h positive, si M et omnes sequentes coefficientes reales sint, sumto vero h negative, si M et omnes sequentes coefficientes terminorum, exponentibus fractis affectorum, imaginarii sint. Itaque ambo rami in hoc puncto præcisi sunt, ita ut ab altera parte puncti exstent, ab altera nulli sint. In qua vero parte exstant, ibi habent contactum primi ordinis cum inter se, tum cum tangente, quæ eos media interjacet. Tale punctum vocatur *cuspis* et quidem *primæ speciei*.

Sin quoque numerator nihilo æqualis sit, evadit $\frac{d^2y}{dx^2}$ in æquatione (5) $= \frac{0}{0}$, et valor ejus determinatus quærendus est ex æquatione (6), ubi termini, qui $\frac{d^4y}{dx^4}$ et $\frac{d^3y}{dx^3}$ continent, desunt, $\frac{d^2y}{dx^2}$ vero ad secundam potestatem evectus adest. Hic igitur coefficiens ibi duos valores obtinebit, qui vel reales et inæquales, vel reales et æquales, vel imaginarii esse possunt. Nullus vero valor infinite magnus fieri potest, cum adsumtum sit, $\frac{d^2u}{dy^2}$, qui, triplicatus, coefficiens est summæ potestatis ipsius $\frac{d^2y}{dx^2}$ in hac æquatione, finitum valorem retinere.

Si ambo valores reales et inæquales sint, etiam $\frac{d^3y}{dx^3}$ duo valores reales et inæquales obtinebit, substitutis his valoribus ipsius $\frac{d^2y}{dx^2}$, altero post alterum, in æquatione (7). Sed nec plures quam duo valores obtinebit, cum hæc æquatio non nisi primam ejus potestatem contineat, nec ullus valor infinite magnus fieri potest,

cum denominator sit prima derivata ejus æquationis, ex qua $\frac{d^2y}{dx^2}$ determinatur, factore numerico neglecto, quæ quidem derivata nihilo æqualis esse nequit, $\frac{d^2y}{dx^2}$ duos valores inæquales obtinente. Et cum eadem sit ratio omnium sequentium coefficientium, qui, substitutis loco antecedentium valoribus jam inventis, ex sequentibus æquationibus determinantur, erit

$$k = Ah + \begin{cases} Bh^2 + Ch^3 + \text{etc.} \\ B'h^2 + C'h^3 + \text{etc.} \end{cases}$$

Quibus seriebus duo integri rami curvæ designantur, qui habent contactum primi ordinis cum inter se, tum cum tangente, cujus ad diversas partes jacent, quoties B et B′ opposita signa habent, ab eadem vero parte, quoties B et B′ idem signum sortiuntur. De cetero, si nonnulli termini utriusvis seriei nulli sint, ramus, qui per eam determinatur, ea singularitate, quæ ex supra (20) expositis huic casui respondet, affectus est.

Si ambo valores ipsius $\frac{d^2y}{dx^2}$ reales et æquales sint, denominator expressionis pro tertio coefficiente differentiali, ex æquatione (7) deductæ, nihilo æqualis fit, ideoque evadit valor hujus coefficientis aut $= \infty$, aut $= \frac{0}{0}$, prout numerator aut finitus, aut nihilo æqualis est.

Si $\frac{d^3y}{dx^3} = \infty$, erit (11)

$$k = Ah + Bh^2 + Mh^{\frac{5}{2}} + \text{etc.}$$

Quæ quidem forma seriei indicat, ramos ab altera tantum parte puncti exstare, ibique contactum secundi ordinis inter se, primi vero ordinis cum tangente habere, quæ ab eadem parte utriusque sita sit. Tale punctum vocatur *cuspis secundæ speciei.* Si $B = 0$, rami habent contactum secundi ordinis cum inter se, tum cum tangente, et punctum est cuspis primæ speciei, quoniam tangens tum inter ambo ramos jacet.

Si $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{0}{0}$ in æquatione (7), obtinebit in æquatione sequente duos valores, eosque vel reales et inæquales, vel reales et æquales vel imaginarios. Nullus vero infinite magnus fieri potest. Ex valoribus inæqualibus hæ series proveniunt

$$k = Ah + Bh^2 + \begin{cases} Ch^3 + Dh^4 + \text{etc.} \\ C'h^3 + D'h^4 + \text{etc.}, \end{cases}$$

quæ designant duos integros ramos, habentes contactum secundi ordinis inter se, primi vero ordinis eum tangente. Si $B = 0$, contactus cum tangente est quoque secundi ordinis, et uterque ramus subit inflexionem.

Tertio vero coefficiente valores æquales obtinente, fit, si $\frac{d^4y}{dx^4} = \infty$,

$$k = Ah + Bh^2 + Ch^3 + Mh^{\frac{7}{2}} + \text{etc.},$$

et punctum est cuspis secundæ speciei; at si, $\frac{d^4y}{dx^4}$ duos valores inæquales sortiatur, erit

$$k = Ah + Bh^2 + Ch^3 + \begin{cases} Dh^4 + \text{etc.} \\ D'h^4 + \text{etc.}, \end{cases}$$

et ambo rami sunt integri habentque contactum tertii ordinis inter se; atque ita porro.

(29) (*b*). *Si valor duplex ipsius $\frac{dy}{dx}$ nihilo æqualis sit, tangens communis ramorum est parallela axi abscissarum.*

Et quoniam tum coefficiens primi termini $\frac{d^2u}{dy^2}$ in æquatione (24) finitus, terminus vero ultimus $\frac{d^2u}{dx^2}$ nihilo æqualis est, b est valor duplex ipsius y, a vero ad minimum valor triplex ipsius x.

Si $\frac{d^3u}{dx^3}$, qui terminus solus numeratorem expressionis pro $\frac{d^2y}{dx^2}$ in æquatione (5) conficit, finitus sit, a est valor triplex, et $\frac{d^2y}{dx^2}$

evadit $= \infty$, quare series fiet (11)

$$k = \mathrm{M}h^{\frac{3}{2}} + \mathrm{N}h^{\frac{m}{2}} + \text{etc.},$$

qua forma seriei indicatur, punctum esse cuspidem primæ speciei, a quo uterque ramus se in regiones abscissarum positivarum extendit, si coefficientes reales sint, in negativarum vero, si imaginarii.

Si $\frac{d^3u}{dx^3} = 0$, a est valor quadruplex, et $\frac{d^2y}{dx^2}$ fit $= \frac{0}{0}$ in æquatione (5). Quod si in æquatione (6) duos valores reales et inæquales sortiatur, erit

$$k = \begin{cases} \mathrm{B}h^2 + \mathrm{C}h^3 + \mathrm{D}h^4 + \text{etc.} \\ \mathrm{B}'h^2 + \mathrm{C}'h^3 + \mathrm{D}'h^4 + \text{etc.}, \end{cases}$$

et ambo rami exstant integri. Sin valores æquales evadant, erit vel

$$k = \mathrm{B}h^2 + \mathrm{M}h^{\frac{5}{2}} + \text{etc.},$$

si $\frac{d^3y}{dx^3}$ in æquatione (7) reddatur $= \infty$, vel

$$k = \mathrm{B}h^2 + \begin{cases} \mathrm{C}h^3 + \mathrm{D}h^4 + \text{etc.} \\ \mathrm{C}'h^3 + \mathrm{D}'h^4 + \text{etc.}, \end{cases}$$

si $\frac{d^3y}{dx^3}$ in hac æquatione fiat $= \frac{0}{0}$ et in sequente duos valores inæquales obtineat. Illa series designat cuspidem secundæ speciei, hæc duos integros ramos, habentes contactum secundi ordinis inter se, et primi ordinis cum tangente; et sic porro.

Si quoque $\frac{d^4u}{dx^4} = 0$, a est valor quintuplex, et duo valores ipsius $\frac{d^2y}{dx^2}$ sunt, alter finitus, alter nihilo æqualis, si inæquales sint, ambo vero nihilo æquales, si æquales. Priori casu fit

$$k = \begin{cases} \mathrm{B}h^2 + \mathrm{C}h^3 + \mathrm{D}h^4 + \text{etc.} \\ \mathrm{C}'h^3 + \mathrm{D}'h^4 + \text{etc.}, \end{cases}$$

et alter ramus habet contactum primi ordinis, alter secundi cum tangente; posteriori vero

$$k = \mathrm{M}h^{\frac{5}{2}} + \text{etc.},$$

et punctum est cuspis primæ speciei; et sic deinceps, si plures coefficientes differentiales partiales continui nihilo æquales sint.

(30) (*c*). *Si valor duplex ipsius* $\frac{dy}{dx}$ *infinite magnus sit, tangens communis ramorum est normalis ad axem abscissarum.*

Et quoniam tum coefficiens primi termini $\frac{d^2u}{dy^2}$ in æquatione (**24**) nihilo æqualis, terminus vero ultimus $\frac{d^2u}{dx^2}$ finitus est, b est ad minimum valor triplex ipsius y, sed a non nisi valor duplex ipsius x.

Si $\frac{d^3u}{dy^3}$ valorem finitum obtineat, b est valor triplex, et series erit (**11**)

$$k = \mathrm{M}h^{\frac{2}{3}} + \mathrm{N}h^{\frac{m}{3}} + \text{etc.},$$

ubi k unicum valorem realem, eodem signo, quo coefficiens M, affectum, accipit, sive h positive, sive negative sumatur. Quare duo rami, in puncto præcisi et ab sua quisque parte tangentis siti, extendunt se sursum, si M positivus sit, deorsum vero, si negativus. Punctum igitur est cuspis primæ speciei.

Si $\frac{d^3u}{dy^3} = 0$, b est valor quadruplex, et k obtinebit quatuor, h vero duo valores, id quod duobus modis fieri potest, vel per duas series, secundum fractas potestates ipsius h progredientes, in quibus ambabus communis denominator exponentium sit 2, et exponens primi termini $\frac{1}{2}$ (**12**), vel per unam seriem, in qua communis denominator sit 4, et numerator primi exponentis 2 (**11**).

Priori casu erit

$$k = \begin{cases} Mh^{\frac{1}{2}} + Nh^{\frac{m}{2}} + \text{etc.} \\ M'h^{\frac{1}{2}} + N'h^{\frac{p}{2}} + \text{etc.}, \end{cases}$$

quarum serierum utraque integrum ramum designat (22). Hi vero rami habent contactum primi ordinis inter se et cum tangente, cujus ad diversas partes jacent, quoties coefficientes unius seriei reales, alterius imaginarii sunt, contra ea ab eadem parte, quoties coefficientes utriusque seriei vel reales, vel imaginarii simul sunt. Fieri etiam potest, ut series ad posteriorem demum terminum se in duas partes findat, id quod evenit, quoties rami contactum superioris ordinis habent inter se. Sic si

$$k = Mh^{\frac{1}{2}} + \begin{cases} Nh^{\frac{m}{2}} + \text{etc.} \\ N'h^{\frac{p}{2}} + \text{etc.}, \end{cases}$$

contactus ramorum inter se est secundi ordinis.

Posteriori casu, quo quatuor valores ipsius k ope unius seriei exprimuntur, fit exponens primi termini $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Sed, quo k quatuor valores obtineat, inter exponentes sequentium terminorum quidam inveniantur necesse est, qui, numeratore impari numero exsistente, denominatorem 4 retineant. Et cum nihil ad determinationem singularitatis faciat, cui termino primo id accidat, ponamus, exponentem secundi termini ita se habere ejusque numeratorem esse 3. Quo posito fit

$$k = Mh^{\frac{1}{2}} + Nh^{\frac{3}{4}} + \text{etc.}$$

Quamvis in hac serie, sumto h vel affirmative vel negative, prout coefficiens M realis vel imaginarius est, primus terminus geminos valores reales, alterum positivum, alterum negativum, obtineat, tamen ambo numquam simul adhiberi possunt, siquidem secundus quoque terminus realis futurus sit. Nam cum quatuor valores ipsius $h^{\frac{3}{4}}$, h. e. $\pm\sqrt{\pm\sqrt{h^3}}$, duobus valoribus ipsius

$h^{\frac{1}{2}}$, h. e. $\pm\sqrt{h}$, ita respondeant, ut, sumto $+\sqrt{h}$, sumatur $\pm\sqrt{+\sqrt{h^3}}$, et sumto $-\sqrt{h}$, sumatur $\pm\sqrt{-\sqrt{h^3}}$; ex quatuor vero valoribus ipsius $h^{\frac{3}{4}}$ non nisi bini simul secundum terminum realem reddere possint : is solus valor in primo termino adhibendus est, qui binos aptos valores secundi termini producat. Sic si et M et N reales sint, primo incrementum positive sumendum est, $+h$, ut primus terminus realis fiat, tum radix ejus quadrata quoque positive sumenda est, $+\sqrt{h}$, ut factor secundi termini, $h^{\frac{3}{4}}=\sqrt{+\sqrt{h^3}}$, fiat realis adeoque cum N conficiat productum reale. Si M realis sit, sed N imaginarius per factorem $\sqrt{-1}$, incrementum positive sumendum est, $+h$, ut primus terminus realis fiat, sed radix ejus quadrata negative sumenda est, $-\sqrt{h}$, ut factor secundi termini $h^{\frac{3}{4}}=\sqrt{-\sqrt{h^3}}=\sqrt[4]{h^3}\sqrt{-1}$, imaginarius per factorem $\sqrt{-1}$ redditus, conficiat cum N productum reale. Si M sit imaginarius per factorem $\sqrt{-1}$, et N per factorem $\sqrt{-\sqrt{-1}}$, incrementum negative sumendum est, $-h$, ut primus terminus realis fiat, sed radix ejus quadrata positive sumenda est, $+\sqrt{-h}$, ut factor $h^{\frac{3}{4}}=\sqrt{+\sqrt{-h^3}}=\sqrt[4]{h^3}\sqrt{+\sqrt{-1}}$, imaginarius per factorem $\sqrt{+\sqrt{-1}}$, conficiat cum N productum reale. Denique si M sit imaginarius per factorem $\sqrt{-1}$, et N per factorem $\sqrt{+\sqrt{-1}}$, incrementum negative sumendum est, $-h$, ut primus terminus realis fiat, et radix ejus quadrata quoque negative sumenda est, $-\sqrt{-h}$, ut factor $h^{\frac{3}{4}}=\sqrt{-\sqrt{-h^3}}=\sqrt[4]{h^3}\sqrt{-\sqrt{-1}}$, imaginarius per factorem $\sqrt{-\sqrt{-1}}$, conficiat cum N productum reale. Hinc colligitur, duos ramos curvæ in puncto præcisos, ab eademque parte tangentis sitos esse, atque adeo cuspidem secundæ speciei formare.

Si quoque $\frac{d^4u}{dy^4}=0$, b est valor quintuplex, et erit vel (12)

$$k=\begin{cases} \mathrm{M}h^{\frac{1}{2}}+\mathrm{N}h^{\frac{m}{2}}+\text{etc.} \\ \mathrm{M}'h^{\frac{1}{3}}+\mathrm{N}'h^{\frac{p}{3}}+\text{etc.}, \end{cases}$$

quibus seriebus designantur duo integri rami, habentes contactum primi ordinis inter se, alter vero primi, alter secundi ordinis cum tangente ; vel (11)

$$k = \mathrm{M}h^{\frac{2}{5}} + \mathrm{N}h^{\frac{m}{5}} + \text{etc.},$$

qua forma seriei indicatur, punctum esse cuspidem primæ speciei ; et ita porro.

Itaque, quoties $\frac{dy}{dx}$ duos valores reales eosque æquales obtinet, duo rami curvæ contingunt se invicem in puncto, qui quidem vel integri sunt, ita ut se in utramque partem puncti extendant, si series se in duas findat, vel præcisi, ita ut ab altera tantum parte exstent et cuspidem fingant, si series indivisa maneat.

(3°.) *Si ambo valores primi coefficientis differentialis $\frac{dy}{dx}$ imaginarii sint, ambo rami in solum punctum redacti sunt, quod* CONJUGATUM *vocatur.* (31)

Quoniam hic omnes coefficientes imaginarii evadunt, et series nihilominus, nullo coefficiente infinite magno reddito, secundum integras potestates incrementi h progredi debet, manifestum est, k, sive h affirmative, sive negative sumatur, meros valores imaginarios sortiri, quare nullus ramus curvæ per punctum transit.

Punctum est etiam conjugatum, etiamsi $\frac{dy}{dx}$ valorem realem sortiatur, quoties vel in serie, secundum integras potestates ipsius h progrediente, aliquis ex sequentibus coefficientibus imaginarius fit, vel in serie, fractas potestates continente, nec $+h$, nec $-h$ omnes terminos simul reales reddere possunt.

SI, PUNCTI CUJUSDAM COORDINATIS a ET b PRO x ET y SUBSTITUTIS, TERMINI ÆQUATIONUM (3) ET (4), NON VERO ÆQUATIONIS (5), PRO SE QUISQUE NIHILO ÆQUALES REDDANTUR, PRIMUS COEFFICIENS DIFFERENTIALIS $\frac{dy}{dx}$ TRES OBTINET VALORES, ET PUNCTUM EST TRIPLEX. (32)

Quoniam in hoc casu $\frac{dy}{dx}$ non modo in æquatione (3), sed etiam in

æquatione (4) evadit $= \frac{0}{0}$ atque adeo indeterminatus, ad proxime subsequentem æquationem (5) progrediendum est, ut inde valor determinatus eruatur. Et cum hæc æquatio, quæ, ob

$$\frac{du}{dy} = 0, \ \frac{d^2u}{dy^2} = 0, \ \frac{d^2u}{dydx} = 0, \text{ abit in}$$

(33) $$\frac{d^3u}{dy^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3\,\frac{d^3u}{dy^2dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\,\frac{d^3u}{dydx^2}\,\frac{dy}{dx} + \frac{d^3u}{dx^3} = 0,$$

sit tertii gradus, $\frac{dy}{dx}$ obtinebit ibi tres valores. Hi vero valores vel omnes reales et inæquales, vel unus realis et duo imaginarii, vel omnes reales et duo æquales, vel omnes reales et æquales esse possunt.

(34) (1°). *Si tres valores primi coefficientis differentialis* $\frac{dy}{dx}$ *reales et inæquales sint, tres tangentes curvæ diverse in axem abscissarum inclinatæ sunt, et tres rami, semper exstantes, decussant se invicem in puncto.*

Cum hic tum $\frac{du}{dy}$ et $\frac{d^2u}{dy^2}$, tum $\frac{du}{dx}$ et $\frac{d^2u}{dx^2}$ nihilo æquales sint, b et a sunt valores triplices ipsarum y et x in æquatione $f(x,y)=0$, quamobrem k et h ternos valores obtinere debent. Quod si tres valores inæquales ipsius $\frac{dy}{dx}$, alius post alium, in æquatione (6) substituantur, in qua termini, qui continent $\frac{d^4y}{dx^4}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ et $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$, ob coefficientes nihilo æquales evanescunt, $\frac{d^2y}{dx^2}$ tres valores reales et inæquales obtinebit, quorum nullus, si valores ipsius $\frac{dy}{dx}$ finiti sint, infinite magnus fieri potest, cum denominator expressionis, factore numerico neglecto, sit prima functio derivata æquationis (33), quæ nihilo æqualis esse nequit, nisi ipsa æquatio habeat radices æquales. Et cum eadem sit ratio omnium sequentium coefficientium, qui, valoribus jam inventis pro antecedentibus

substitutis, ex sequentibus æquationibus determinantur, prodibit

$$k = \begin{cases} Ah + Bh^2 + Ch^3 + \text{etc.} \\ A'h + B'h^2 + C'h^3 + \text{etc.} \\ A''h + B''h^2 + C''h^3 + \text{etc.}, \end{cases}$$

quæ series suum quæque diversum ramum curvæ definiunt; et quoniam in qualibet eædem aberrationes a formula generali, quæ in serie, simplicem ramum determinante, occurrere possunt, quivis ramorum in puncto triplici qualibet singularitate, quam talibus aberrationibus respondere supra (**20, 21, 22**) demonstravimus, affectus esse potest. Sic si $A = 0$, tangens unius rami est parallela axi abscissarum; si $B = 0$, hic ramus subit inflexionem; si $A = \infty$, tangens est normalis ad axem abscissarum; et sic porro.

*Itaque, quoties $\frac{dy}{dx}$ tres valores reales eosque inæquales obtinet, tres rami curvæ decussant se invicem in puncto, quorum quilibet, serie a formula generali aberrante, quavis singularitate, quam supra (**20, 21, 22**) in simplici ramo inesse posse ostendimus, affectus esse potest.*

(2°). *Si trium valorum primi coefficientis differentialis $\frac{dy}{dx}$ unus realis et duo imaginarii sint, una tantum tangens, atque adeo unus tantum ramus curvæ exstat in puncto, quod simul conjugatum est.* (35)

Posito valore reali loco ipsius $\frac{dy}{dx}$ in æquatione (6), $\frac{d^2y}{dx^2}$ quoque unum valorem realem obtinebit, et his valoribus realibus pro $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ in æquatione (7) substitutis, $\frac{d^3y}{dx^3}$ pariter obtinebit unum valorem realem, et sic porro. Ex valoribus vero imaginariis ipsius $\frac{dy}{dx}$ prodeunt meri valores imaginarii etiam pro ceteris coefficientibus, et cum seriem nihilominus, nullis coefficientibus valores infinite magnos induentibus, secundum potestates integras incrementi h progredi oporteat, sequitur, ut tres valores ipsius k in

hoc casu per tres series, secundum integras potestates ipsius h progredientes, exprimantur, quarum una, valoris realis compos, ramum realem curvæ designat, ceteræ vero, valores imaginarios sortientes, indicant, nihil de ceteris ramis reliqui esse præter solum punctum, quod igitur est punctum conjugatum, in ipso ramo reali situm. Ceterum, si in serie reali quædam aberratio a formula generali occurrat, ramus ea singularitate gaudet, quæ huic aberrationi respondet (**20, 21, 22**).

(36) (3°). *Si trium valorum realium primi coefficientis differentialis* $\frac{dy}{dx}$ *duo æquales sint, duæ tangentium habent candem inclinationem in axem abscissarum, h. e. coeunt in unam, et duo ramorum curvæ contingunt se invicem, secantur vero a tertio.*

Cum radix simplex æquationis (**33**) primam ejus derivatam finitam, sed radix duplex eandem nihilo æqualem reddere debeat, erit functio

(37)
$$\frac{d^3u}{dy^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\,\frac{d^3u}{dy^2dx}\,\frac{dy}{dx}+\frac{d^3u}{dydx^2},$$

vel finita vel nihilo æqualis, prout in ea valor vel simplex vel duplex pro $\frac{dy}{dx}$ substitutus fuerit. Valorum vero aut uterque finitus, aut alteruter vel nihilo æqualis vel infinite magnus esse potest.

(38) (*a*). *Si uterque valor, tum simplex, tum duplex, finitus sit, ambo tangentes in axem abscissarum inclinatæ sunt.*

Et quoniam tum nec coefficiens primi termini $\frac{d^3u}{dy^3}$, nec ultimus terminus $\frac{d^3u}{dx^3}$ in æquatione (**33**) nihilo æqualis est, b et a non sunt nisi valores triplices ipsarum y et x, quare k et h ternos tantum valores obtinere oportet. Jam vero, si valor simplex ipsius $\frac{dy}{dx}$ in æquatione (**6**) substituatur, $\frac{d^2y}{dx^2}$ valorem unicum obtinebit, qui, quia functio (**37**) est finita, infinite magnus fieri nequit. Pari modo ceteri quoque coefficientes differentiales unicum valorem finitum adipiscuntur. Ex valore igitur simplici oritur hæc series

regularis

$$k = Ah + Bh^2 + Ch^3 + \text{etc.},$$

qua ramus integer curvæ determinatur, qui inflexionem subit, si sit $B = 0$.

Sin valor duplex ipsius $\frac{dy}{dx}$ in æquatione (6) substituatur, denominator expressionis pro $\frac{d^2y}{dx^2}$, ob functionem (37) nihilo æqualem, nullus fit. Numerator vero vel finitus vel nullus esse potest. Si finitus sit, $\frac{d^2y}{dx^2}$ evadit $= \infty$, et series inde a secundo termino secundum fractas potestates ipsius h progrediatur necesse est, et quidem ita, ut communis denominator sit 2, et exponens secundi termini inter 1 et 2 comprehendatur. Itaque fit

$$k = A'h + Mh^{\frac{3}{2}} + Nh^{\frac{m}{2}} + \text{etc.}$$

Si quoque numerator nihilo æqualis fiat, coefficiens $\frac{d^2y}{dx^2}$ indeterminatus manet, qui adeo ope æquationis sequentis (7), ubi ad secundam potestatem evectus occurit, determinandus est. Quamobrem duos valores obtinebit, qui vel reales et inæquales, vel reales et æquales, vel imaginarii esse possunt. Quoniam autem coefficiens summæ potestatis ipsius $\frac{d^2y}{dx^2}$, qui idem, factore numerico neglecto, est secunda derivata æquationis (35), nihilo æqualis esse nequit, nisi tres æquationis radices æquales sint, nullus valor infinite magnus esse potest. Si ambo valores reales et inæquales evadant, fit

$$k = A'h + \begin{cases} B'h^2 + C'h^3 + \text{etc.} \\ B''h^2 + C''h^3 + \text{etc.}, \end{cases}$$

sin æquales, et $\frac{d^3y}{dx^3}$ in æquatione sequente infinite magnus fiat, erit

$$k = A'h + B'h^2 + Mh^{\frac{5}{2}} + \text{etc.},$$

et sic porro.

Incidimus ergo in easdem series, per quas valores incrementi k exprimuntur, quoties in puncto duplici ambo valores primi coefficientis differentialis æquales et finiti sunt (28), quamobrem duo rami, quibus tangens communis est, vel ab utraque parte puncti se extendunt, vel præcisi sunt et cuspidem fingunt, prout series vel se in duas partes findit, vel indivisa manet.

(39) *(b). Si alteruter valorum, sive simplex, sive duplex, nihilo æqualis sit, tangens, ad quam hic valor pertinet, est parallela axi abscissarum.*

Et quoniam tum coefficiens primi termini $\frac{d^3u}{dy^3}$ in æquatione (33) finitus, terminus vero ultimus $\frac{d^3u}{dx^3}$ nihilo æqualis est, b est valor triplex ipsius y, sed a ad minimum valor quadruplex ipsius x, quare h hic plures valores, quam in priori casu (38), obtinebit. Numerum vero excedentem valorum in eadem serie, cujus primus coefficiens differentialis est $= 0$, expressum inveniemus. Sic si valor simplex sit $= 0$, series simplex, prout unus, vel duo, vel tres, etc., deinceps coefficientium differentialium partialium, $\frac{d^3u}{dx^3}$, $\frac{d^4u}{dx^4}$, $\frac{d^5u}{dx^5}$, etc., nihilo æquales sunt, eam formam induet, qua in puncto simplici duo, vel tres, vel quatuor, etc., valores ipsius h designantur (21); et si valor duplex sit $= 0$, series duplex, prout unus, vel duo, vel tres, etc., deinceps horum coefficientium nihilo æquales sunt, eam formam induet, qua in puncto duplici tres, vel quatuor, vel quinque, etc., valores ipsius h designantur (29).

(40) *(c). Si alteruter valorum, sive simplex, sive duplex, infinite magnus sit, tangens, ad quam hic valor pertinet, est normalis ad axem abscissarum.*

Et quoniam tum coefficiens primi termini $\frac{d^3u}{dy^3}$ in æquatione (33) nihilo æqualis, sed ultimus terminus $\frac{d^3u}{dx^3}$ finitus est, b est ad minimum valor quadruplex ipsius y, a vero valor triplex ipsius x, quare k hic plures valores, quam in primo casu (38),

obtinebit. Numerum vero excedentem valorum in eadem serie, cujus primus coefficiens differentialis est $=\infty$, expressum esse oportet, ita ut, prout unus, vel duo, vel tres, etc., deinceps coefficientium differentialium partialium, $\frac{d^3u}{dy^3}$, $\frac{d^4u}{dy^4}$, $\frac{d^5u}{dy^5}$, etc., nihilo æquales sunt, aut series simplex, si valor simplex sit $=\infty$, induat eam formam, qua in puncto simplici duo, vel tres, vel quatuor, etc., valores ipsius k designantur (22), aut series duplex, si valor duplex sit $=\infty$, capiat eam formam, qua in puncto duplici tres, vel quatuor, vel quinque, etc., valores ipsius k denotantur (30).

Si alter valor nihilo æqualis, alter infinite magnus sit, series altera illo (39), altera hoc (40) modo transformabitur.

Itaque, quoties $\frac{dy}{dx}$ *tres valores, quorum duo æquales sunt, obtinet, duo rami curvæ, se invicem tangentes, a tertio secantur. De cetero ramus secans quamvis singularitatem, quam curva in puncto simplici admittit* (20, 21, 22), *et rami, se invicem tangentes, quamvis speciem, quam ejusmodi rami in puncto duplici induunt* (28, 29, 30), *præbere possunt.*

(4°.) *Si tres valores primi coefficientis differentialis* $\frac{dy}{dx}$ *reales et æquales sint, tres tangentes habent eandem inclinationem in axem abscissarum, h. e. coeunt in unam, et tres rami curvæ, si exstent, contingunt se invicem in puncto.* (41)

Cum tres radices æquationis (35) æquales sint, non modo prima, sed etiam secunda derivata nihilo æqualis erit. Habemus ergo in hoc casu cum

$$\frac{d^3u}{dy^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,\frac{d^3u}{dy^2dx}\,\frac{dy}{dx} + \frac{d^3u}{dydx^2} = 0\text{, tum} \tag{42}$$

$$\frac{d^3u}{dy^3}\,\frac{dy}{dx} + \frac{d^3u}{dy^2dx} = 0. \tag{43}$$

Radix vero triplex vel finita, vel nihilo æqualis, vel infinite magna esse potest.

(44) (*a*). *Si valor triplex ipsius* $\frac{dy}{dx}$ *finitus sit, tangens communis ramorum inclinata est in axem abscissarum.*

Et quoniam tum nec coefficiens primi termini $\frac{d^3u}{dy^3}$, nec ultimus terminus $\frac{d^3u}{dx^3}$ in æquatione (33) nihilo æqualis est, b et a non sunt nisi valores triplices ipsarum y et x, quare k et h ternos valores obtinere debent. Substituto vero valore triplici pro $\frac{dy}{dx}$ in æquatione (6), valor secundi coefficientis differentialis $\frac{d^2y}{dx^2}$ erit ob conditionem (42) vel $= \infty$, vel $= \frac{0}{0}$, prout numerator vel finitus, vel nullus est.

Si $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$, series inde a secundo termino secundum fractas potestates incrementi h progredietur, et quidem ita, ut communis denominator sit 3, et exponens secundi termini inter 1 et 2 comprehendatur (11). Quibus conditionibus etsi duo numeri fracti, $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$, satisfaciant, tamen ambiguum non est, uter futurus sit exponens secundi termini; nam cum coefficiens quartæ potestatis ipsius h, qui idem numeratorem expressionis pro $\frac{d^2y}{dx^2}$ constituit, finitus sit, hujus potestatis præsentia in serie ita se indicabit, ut sit 4 numerator primi exponentis fracti. Itaque fit

$$k = Ah + Mh^{\frac{4}{3}} + \text{etc.},$$

qua serie, unici tantum valoris realis compote, sive h affirmative, sive negative sumatur, solus ramus curvæ determinatur, cui punctum conjugatum, in quod folium evanuit, adjunctum est, id quod etiam ex eo apparet, quod, secundo coefficiente differentiali infinite magno exsistente, radius curvaturæ nullus est.

Sin, numeratore quoque evanescente, $\frac{d^2y}{dx^2}$ in æquatione (6) fiat

$= \frac{0}{0}$, valor ejus ope æquationis (7) determinandus est, in qua, nisi indeterminatus relinquatur, quoniam ad secundam potestatem evectus occurrit, obtinebit duos valores, quorum tamen alter, quia coefficiens summæ potestatis ob conditionem (45) evanescit, infinite magnus est. Alter autem vel finitus, vel nihilo æqualis, vel infinite magnus fieri potest. Ex illo oritur series, secundum fractas potestates ipsius h inde a secundo termino procedens, ex hoc, si finitus sit, series regularis, quare fit (12)

$$k = Ah + \begin{cases} Mh^{\frac{3}{2}} + Nh^{\frac{m}{2}} + \text{etc.} \\ Bh^2 + Ch^3 + \text{etc.}, \end{cases}$$

quarum sericrum prior duos ramos detruncatos, qui cuspidem primæ speciei fingunt (28), posterior vero integrum ramum determinat, qui omnes rami habent contactum primi ordinis cum inter se, tum cum tangente. At si alter valor nullus sit, integer ramus habet contactum secundi ordinis cum tangente et subit inflexionem. In utroque casu ramus integer in regionibus, puncto triplici finitimis, inter ambo detruncatos jacet; nam, qualescumque sint coefficientes, incrementum h semper tam parvum sumi potest, ut terminus, inferiorem ejus potestatem continens, major sit, adeoque cum Bh^2, tum multo potius Ch^3 valorem inter $+ Mh^{\frac{3}{2}}$ et $- Mh^{\frac{3}{2}}$ medium obtineant.

Si alter quoque valor infinite magnus sit, atque ita ambo valores æquales evadant, tres valores ipsius k exprimentur per hanc seriem, secundum fractas potestates ipsius h progredientem inde a secundo termino, in quo, quia coefficiens quartæ potestatis nullus, quintæ vero finitus est, numerator exponentis erit 5,

$$k = Ah + Mh^{\frac{5}{3}} + \text{etc.},$$

quæ series solum ramum designat, cui punctum conjugatum adjunctum est, et qui, quoniam secundus terminus serici opposita signa sortitur, prout h affirmative vel negative sumitur, inflexionem subit. Hæc vero inflexio ab ea, quæ in puncto simplici oc-

currere potest, in eo discrepat, quod tangens hic contactum non nisi primi ordinis cum curva habet.

Si $\frac{d^2y}{dx^2}$ etiam in æquatione (7) evadat $= \frac{0}{0}$, valor ejus per æquationem sequentem determinandus est, ubi ad tertiam potestatem evectus occurrit. Accipiet ergo tres valores, qui vel omnes reales et inæquales, vel unus realis et duo imaginarii, vel omnes reales et duo æquales, vel omnes reales et æquales esse possunt. Nullus vero infinite magnus fieri potest, quoniam coefficiens summæ potestatis ipsius $\frac{d^2y}{dx^2}$ finitus est.

Si tres valores reales et inæquales sint, fit

$$k = Ah + \begin{cases} Bh^2 + Ch^3 + \text{etc.} \\ B'h^2 + C'h^3 + \text{etc.} \\ B''h^2 + C''h^3 + \text{etc.}, \end{cases}$$

et omnes tres rami curvæ exstant integri, habentes contactum primi ordinis inter se et cum tangente. Si unus valor sit $= 0$, unus ramus habet contactum secundi ordinis cum tangente et subit inflexionem.

Si unus tantum valor realis sit, unicus tantum ramus curvæ exstat.

Si omnes valores reales et duo æquales sint, erit

$$k = Ah + \begin{cases} Bh^2 + Ch^3 + \text{etc.} \\ B'h^2 + Mh^{\frac{5}{2}} + \text{etc.}, \end{cases}$$

si $\frac{d^3y}{dx^3}$ per substitutionem valoris duplicis fiat $= \infty$; at

$$k = Ah + \begin{cases} Bh^2 + \quad Ch^3 + \text{etc.} \\ B'h^2 + \begin{cases} C'h^3 + \text{etc.} \\ C''h^3 + \text{etc.}, \end{cases} \end{cases}$$

si $\frac{d^3y}{dx^3}$ duos valores inæquales, huic valori respondentes, sortia-

tur; et duo rami, priori casu detruncati cuspidemque secundæ speciei formantes, posteriori integri, habent contactum secundi ordinis inter se, atque primi ordinis cum tertio integro et cum tangente.

Si omnes valores reales et æquales sint, et valor ipsius $\frac{d^3y}{dx^3}$ in æquatione sequente fiat $=\infty$, erit

$$k = \mathrm{A}h + \mathrm{B}h^2 + \mathrm{M}h^{\frac{2}{3}} + \text{etc.},$$

et unicus tantum ramus exstat; sicque porro.

(*b*). *Si valor triplex ipsius* $\frac{dy}{dx}$ *nihilo æqualis sit, tangens communis ramorum est parallela axi abscissarum.* (45)

Et quoniam tum coefficiens primi termini $\frac{d^3u}{dy^3}$ in æquatione (35) finitus, sed ultimus terminus $\frac{d^3u}{dx^3}$ nullus est, b est valor triplex ipsius y, sed a ad minimum valor quadruplex ipsius x.

Si $\frac{d^4u}{dx^4}$ finitus sit, atque adeo $\frac{d^2y}{dx^2}$ in æquatione (6) evadat $=\infty$, a est valor quadruplex ipsius x, et series erit

$$k = \mathrm{M}h^{\frac{4}{3}} + \mathrm{N}h^{\frac{m}{3}} + \text{etc.},$$

qua unicus ramus realis designatur.

Si quoque $\frac{d^4u}{dx^4}$ sit $=0$, a est valor quintuplex ipsius x, et expressio valorum ipsius k erit aut

$$k = \begin{cases} \mathrm{M}h^{\frac{3}{2}} + \mathrm{N}h^{\frac{m}{2}} + \text{etc.} \\ \mathrm{B}h^2 + \mathrm{C}h^3 + \text{etc.}, \end{cases}$$

si duo valores ipsius $\frac{d^2y}{dx^2}$ in æquatione (7) inæquales fiant; aut

$$k = \mathrm{M}h^{\frac{5}{3}} + \mathrm{N}h^{\frac{m}{3}} + \text{etc.},$$

si hi valores æquales sint. Priori casu omnes tres rami exstant, duo præcisi, unus integer, habentes contactum primi ordinis inter se et cum tangente; posteriori solus ramus integer exstat, inflexionem subiens; et sic porro.

(*c*). *Si valor triplex ipsius* $\frac{dy}{dx}$ *infinite magnus sit, tangens communis ramorum est normalis ad axem abscissarum.*

Et quoniam tum coefficiens primi termini æquationis (33) $\frac{d^3u}{dy^3}$ nullus, sed ultimus terminus $\frac{d^3u}{dx^3}$ finitus est, b est ad minimum valor quadruplex ipsius y, a vero valor triplex ipsius x.

Itaque, $\frac{d^4u}{dy^4}$ valorem finitum obtinente, b est valor quadruplex, et series fit (11)

$$k = \mathrm{M}h^{\frac{3}{4}} + \mathrm{N}h^{\frac{m}{4}} + \text{etc.},$$

quæ, realis reddita per solum positivum, vel solum negativum valorem incrementi h, prout coefficientes reales, vel imaginarii sunt, in utrovis vero casu duos valores obtinens, determinat unicum ramum sine inflexione.

Si quoque $\frac{d^4u}{dy^4}$ sit $= 0$, b est valor quintuplex ipsius y, et erit aut (12)

$$k = \begin{cases} \mathrm{M}h^{\frac{2}{3}} + \mathrm{N}h^{\frac{m}{3}} + \text{etc.} \\ \mathrm{M}'h^{\frac{1}{2}} + \mathrm{N}'h^{\frac{p}{2}} + \text{etc.}, \text{ aut (11)} \end{cases}$$

$$k = \mathrm{M}h^{\frac{3}{5}} + \mathrm{N}h^{\frac{m}{5}} + \text{etc.}$$

Priori casu omnes tres rami, duo detruncati, unus integer, exstantes, habent contactum primi ordinis inter se; posteriori solus ramus exstans, subit inflexionem; et ita porro.

Itaque, quoties $\frac{dy}{dx}$ *tres valores reales eosque æquales obtinet,*

vel solus ramus una cum puncto conjugato, vel duo rami præcisi, cuspidem fingentes, et unus integer, vel tres integri, se invicem tangentes, exstant, prout valores ipsius k per unam, vel duas, vel tres series exprimuntur.

Cum hæ determinationes, adhibendis principiis, quæ hic tradidimus, quousque libuerit, facile continuari possint, disquisitioni jam finem imponimus, illud postremo admonentes, ut, æquatione, qua curva quædam determinatur, data, si cognoscere velimus, num hæc curva punctum singulare certæ cujusdam speciei habeat, quæratur solito modo, num tales valores reales et finiti ipsarum x et y inveniantur, qui non modo ipsi æquationi, sed etiam eis terminis æquationum differentialium satisfaciant, quos nihilo æquales esse oportet, quoties ea singularitas, de qua agitur, in puncto occurrit; et rursus si, datis puncti cujusdam coordinatis, cognoscere velimus, utrum hoc punctum singulare sit, nec ne, illoque comperto, quænam sit singularitas, non solum coordinatæ ejus in æquationibus differentialibus pro x et y substituendæ sint, ut inde appareat, quinam termini evanescant, sed etiam coefficientes serierum, abhibendis methodis, quas in singulis casibus conveniat, determinandi sint, ut perspiciatur, tum utrum series realis, an imaginaria evadat, quoties utrumque accidere possit, tum quænam sit forma seriei in tali casu, ubi hæc ex eis, quæ supra exposita sunt, varia esse possit.

Ex Typographia Bachelier,
via Jardinet, 12.